Instituto de Enseñanza Superior Famaillá

Profesorado en Educación Primaria.

Profesorado en Educación Especial .

MATEMATICA

Proporcionalidad. Razones y proporciones. Cálculo de extremos y medios de una proporción. Proporcionalidad directa e inversa: propiedades, tablas, gráficos cartesianos, constante de proporcionalidad. Porcentaje. Problemas.

Área y perímetro de cuadriláteros y triángulos.

AÑO 2018

La Proporcionalidad

La teoría de las proporciones hace referencia a relaciones numéricas constantes. Estas relaciones pueden corresponder a pares de cantidades continuas, a cuplas de cantidades discontinuas o a ambas.

Estas cantidades aparecen entre un número de objetos y cantidades de magnitudes (longitud, capacidad, peso, superficie, etc) y entre éstas las que correspondes a cantidades físicas (peso, superficie, etc) y las que pertenecen al universo de la Geometría o de las formas.

Toda proporción expresa una constante (llamada constante de proporcionalidad) que define el equilibrio y la armonía – en cada caso- de un “algo de la realidad.

Razones y proporciones numéricas en discontinuos

Relaciones del tipo “cada dos corresponden tres”, como por ejemplo: “por cada dos niños corresponden tres chocolates”, “por cada dos bancos corresponden tres personas”, “por cada dos perlas blancas corresponden tres perlas grises” son correspondencias multivocas constantes de operadores racionales no-enteros, que pueden expresarse así:

“por cada dos corresponden tres” $\frac{2}{3}$

Inversamente, “por cada tres corresponden dos” $\frac{3}{2}$

$\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$ son cocientes que expresan en cada caso la **razón** entre dos cantidades.

- Las razones son fracciones o cocientes entre enteros y no-enteros. Sus elementos toman distintos nombres según se haga referencia al cociente, al número o a la razón.
- En una división “tradicional” estamos en presencia del: Dividendo, Divisor, Cociente y Resto.
- En una fracción está presente el: Numerador y el Denominador.

dividendo

fracción (número) — numerador → $\dfrac{2}{3}$ ← antecedente — razón (relación)

denominador → 3 ← consecuente

cociente

divisor

(operación)

$\dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{3}{2}$ son razones inversas; en general, $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{b}{a}$

- Dos razones iguales forman proporción:

extremo — medio

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

medio — extremo

Puede escribirse también 2 : 3 :: 4 : 6, que se lee **2 es a 3 como 4 es a 6**. Se trata de un par de fracciones equivalentes y a éstas les corresponden razones iguales.

Dados cuatro números distintos de cero forman proporción cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los otros dos. El cero no debe figurar en una proporción, puesto que el cero como divisor —como ya hemos visto— no tiene sentido.

Proporciones deducidas de una dada

Dada una proporción pueden deducirse siete más, lo que significa que existen ocho proporciones a partir de cuatro números cuyas relaciones permiten establecer razones iguales. Ejemplo: Dados los números 2, 4, 3 y 6: 1ª proporción $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6}$
Mediante movimientos —de por lo menos 2 de los números— pueden obtenerse otras equivalencias.

Movimientos posibles

1) **Rotación** de los cuatro números a derecha o a izquierda. Con los números rotan los operadores. $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6}$

2) **Inversión** de las dos razones: $\updownarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6} \updownarrow \Rightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{6}{4}$

3) Aplicación de la **ley de simetría** de las relaciones de equivalencia: $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6} \Rightarrow \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Proporcionalidad directa

Propiedades

Dos cantidades son directamente proporcionales cuando:

le corresponde

al doble de una ⟶ el doble de la otra
al triple de una ⟶ el triple de la otra
al cuádruple ⟶ el cuádruple
a la mitad ⟶ la mitad
....

Ejemplos

Operador constante
(k)

Número de autos x	Número de ruedas y
1	4
2	8
3	12
4	16
6	24
....	....

× 2   × 3   : 2

Si el cociente entre cada valor de **y** y su correspondiente de **x** es una constante, las cantidades son directamente proporcionales.

$$\frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4}$$

En general: $\frac{y}{x} = k$

k: constante de proporcionalidad

En toda proporcionalidad directa a la unidad le corresponde la constante.

$$a\ 1 \xrightarrow{\text{le corresponde}} 4$$

4 es el valor numérico del operador

Si dos cantidades son directamente proporcionales, la razón entre dos valores de una de ellas es igual a la razón entre los valores correspondientes de la otra.

razón

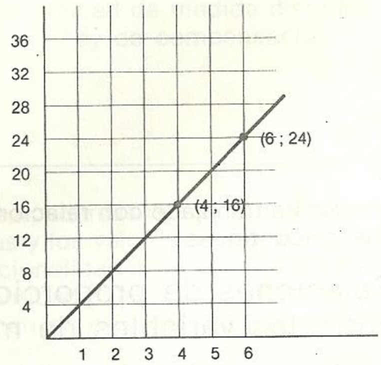
$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = 0,5$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = 0,\widehat{6}\ldots$$

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16} = 0,75$$

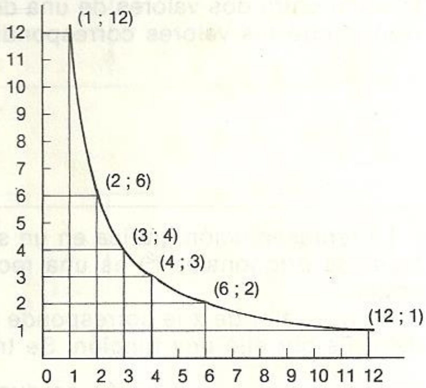
La representación gráfica en un sistema de ejes cartesianos ortogonales ([2]) es una recta que pasa por el origen.

A cada valor de x le corresponde uno y sólo un valor de y. Es por ello una **función**. Se trata de una función lineal $\boxed{y = k \cdot x}$ (función producto)



([2]) **Ejes cartesianos ortogonales:** ejes perpendiculares referenciales que permiten definir un punto por sus coordenadas. Cartesiano deriva de Descartes (primero que los utilizó) y ortogonales significa que forman ángulos congruentes.

Proporcionalidad inversa

Propiedades	Ejemplos
Dos cantidades son inversamente proporcionales si: le corresponde al doble de una ⟶ la mitad de la otra a la mitad de una ⟶ el doble de la otra al triple ⟶ la tercera parte al cuádruple ⟶ la cuarta parte	Número de niños x: 1, 2, 3, 4, 6, 12 (× 2, × 4) Número de globos y: 12, 6, 4, 3, 2, 1 (: 2, : 4) Acción de repartir un número constante de globos (12).
Si el producto de cada valor de **x** por su correspondiente de **y** es una constante, las cantidades son inversamente proporcionales.	$1 \times 12 = 12$ $2 \times 6 = 12$ $3 \times 4 = 12$ $4 \times 3 = 12$ $6 \times 2 = 12$ $12 \times 1 = 12$ En general: $x \cdot y = k$. k: constante de proporcionalidad
En toda proporcionalidad inversa a la unidad le corresponde la constante.	$1 \longrightarrow 12$ 12 es el valor de la operación
Si dos cantidades son inversamente proporcionales, la razón entre dos valores de una de ellas es igual a la razón inversa entre sus correspondientes en la otra.	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ (x: 2, 3; y: 6, 4) Inversión de los valores en una de las dos razones.
La representación gráfica en un sistema de ejes cartesianos de una proporcionalidad inversa es una curva llamada **hipérbole** o **hipérbola**. A cada valor de **x** le corresponde uno y sólo un valor de **y**. Es por ello una **función**. En general $y = \frac{k}{x}$ (función cociente).	

Propiedades de las proporciones

En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

$$\frac{2}{4} = \frac{6}{12} \qquad \text{en general:} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$2 \times 12 = 4 \times 6 \qquad \boxed{a \,.\, d = c \,.\, b}$$

Los pares de números que figuran en una proporción en posición diagonal (uno **factor**: numerador, y otro **divisor**: denominador) están vinculados por una relación de proporcionalidad inversa (cada numerador con el denominador de la otra fracción). La operación que los vincula es un producto.

En toda proporción los pares de números que ocupan posiciones horizontales o verticales se encuentran en proporcionalidad directa y están vinculados por operadores multiplicativos directos o inversos:

$$\times 2 \downarrow \frac{2}{4} \overset{\xrightarrow{\times 3}}{\underset{\xrightarrow{\times 3}}{=}} \frac{6}{12} \downarrow \times 2$$

numerador con numerador

denominador con denominador

numerador con denominador respectivo

En toda proporción un extremo (un medio) es igual al producto de los dos medios (extremos) dividido por el otro extremo (medio).

a) Averiguar el operador o constante de proporcionalidad

$$\frac{y}{x} = \frac{\text{estado final}}{\text{estado inicial}} \rightarrow = k \ \left(\text{en nuestro ejemplo } \frac{6}{2} = 3\right)$$

b) Aplicar el operador encontrado $\xrightarrow{\times 3}$ al 4:

$$\begin{array}{ccc} 2 & \xleftarrow{:} & 6 \\ \times\downarrow & & \\ 4 & & ? \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 \xrightarrow[\times 3]{\times \frac{6}{2}} 6 \\ \\ 4 \xrightarrow{\times 3} ? \end{array} \qquad \frac{6}{2} \times 4 = 3 \times 4$$

medio medio

extremo

En toda proporción la suma o diferencia del antecedente y el consecuente de la primera razón es a su antecedente (o consecuente) como la suma o diferencia del antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su antecedente (o consecuente):

antecedente antecedente

$$\frac{2}{4} = \frac{6}{12} \ ; \quad \frac{2+4}{2} = \frac{6+12}{6} \ ; \quad \frac{2+4}{4} = \frac{6+12}{12}$$

consecuente consecuente

$$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} \qquad \frac{6}{4} = \frac{18}{12}$$

PROPUESTAS DE ACTIVIDADES PARA PROPORCIONALIDAD. PROPORCIONALIDAD NUMÉRICA.

Concretas

- Armar con cuentas, con material Cuisinaire (regletas), ordenamientos que correspondan a la relación "cada dos corresponden 5" y "cada tres corresponden 7"
- Armar proporciones con cartones que tienen escritos números. Aplicarles movimientos de rotación, simetría, inversión y permutación para obtener las demás proporciones.

Gráficas y simbólicas

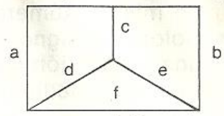
- Expresar, mediante un cociente, la razón entre los números de habitantes de dos ciudades; el número de varones y el número de mujeres inscriptos en la escuela.
- Completar con los números que expresan las razones entre el número de ausentes y el número de presentes en el aula durante un mes. $\frac{\square}{\square}$
- Escribir razones inversas de $\frac{3}{4}$; 2 ; $\frac{4}{5}$; $\frac{0,2}{5}$
- Expresar la razón entre las temperaturas máximas correspondientes al último domingo y lunes.
- Encerrar con un trazo rojo la expresión que corresponde a la razón entre los datos dados:

  $\frac{72 \text{ m}}{250 \text{ m}}$ $\frac{81 \text{ m}}{610 \text{ m}}$ $\frac{72 \text{ m}}{50 \text{ m}}$

  Alturas de las cataratas del Iguazú (Argentina) y Guadalupe (Colombia). Averiguar además a qué corresponden los otros pares de datos (se trata siempre de la altura en metros de la caída de agua en cataratas del mundo).
- Formar la razón entre el número total de letras y el número de consonantes y entre el número de consonantes y el número de vocales.
- Escribir la razón entre el número de vocales y el número de consonantes en las palabras **mequetrefe**; **divisibilidad**.
- Completar utilizando operadores:

  $\frac{3}{6} = \frac{15}{\square}$ $\frac{2}{5} = \frac{\square}{3}$ $\frac{2}{\square} = \frac{4}{\square}$

- Expresar la razón entre las medidas del largo y del ancho del pupitre, de una habitación, de una ventana, de una varilla, de una puerta, de un libro (variar solicitando largo y altura, ancho y altura, según los casos).
- Escribir las razones entre longitudes dibujadas. Hacerlo en centímetros.



- Escribir las proporciones que determinan las medidas de pares de segmentos pertenecientes a la figura.
- Inventar proporciones que correspondan aproximadamente a situaciones de la realidad material.
- Calcular el extremo y el medio desconocido en cada caso:

  $\frac{72}{?} = \frac{18}{360}$ $\frac{?}{11} = \frac{6,6}{33}$

- Identificar medios y extremos.
- Escribir una serie de razones iguales. Comprobar en ella la propiedad de la suma de antecedentes y consecuentes.
- Aplicar la propiedad de la suma de antecedentes y consecuentes en una proporción.
- Escribir las restantes siete proporciones deducidas de la siguiente:

  $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$

  Expresar en cada caso el racional definido mediante la fracción irreducible, una fracción decimal y la correspondiente notación con coma.

  Volcar los datos en la siguiente tabla:

Proporción	Número racional		
	expresión con coma	fracción irreducible	fracción decimal
$\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$	0,6	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{10}$

- Pensar y escribir pares de cocientes equivalentes y pares de productos equivalentes (expresiones multiplicativas y divisivas de un mismo número).
- Colocar el signo = cuando corresponda a una proporción (aplicar el producto de extremos y medios):

$$\frac{\sqrt{4}}{2} \bigcirc \frac{0,25}{0,5} \qquad \frac{3}{8} \bigcirc \frac{1,5}{\sqrt{9}} \qquad \frac{20}{10} \bigcirc \frac{\sqrt{25}}{2,5}$$

- Aplicar la propiedad de la suma de antecedente y consecuente en las siguientes proporciones:

$$\frac{3}{8} = \frac{1,5}{4} \qquad \frac{2,5}{\sqrt{25}} = \frac{15}{30}$$

- Completar tablas de proporcionalidad directa e inversa

Directas

Número de años	Número de meses
3	...
4	...
1	...
...	60
28	...

Número de pasajeros (discontinuo)	Número de lanchas (discontinuo)
60	3
30	...
...	...
...	...
...	...

Número de paquetes de yerba ([redacted])	Peso en gramos ([redacted])

Medida del lado ([redacted])	Medida del contorno (perím ([redacted])

Inversas

Número de perlas por collar	Número de collares
60	1
30	...
15	...
20	...
...	...

constante: número total de perlas = 60

Número de cajas	Número de chocolates por caja
40	12
...	...
...	...
...	...
...	...

k: número total de chocolates por ubicar = 480

Medida de la capacidad del recipiente unidad	Número de de recipientes

k: la capacidad del recipiente a medir

[redacted] [redacted]

Área y perímetro

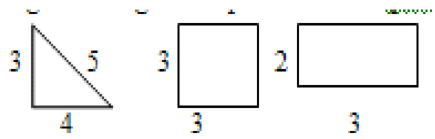
1) Completa el cuadro y contesta:
a) Existe proporcionalidad entre la base y la altura del triángulo?
b) ¿Y entre la base y el área?
c) ¿Entre la altura y el área?
En todos los casos justifica tu respuesta.

Cálculo del área
de un triángulo (en cm^2)

ALTURA

BASE	1	3	5	8	15
1	0,5	1,5	2,5	4	
2,5		3,75			
3					
5		7,5	12,5		37,5

2) Comparando los perímetros de las siguientes figuras se puede afirmar que: a) El triángulo y el rectángulo tienen igual perímetro b) El triángulo y el cuadrado tienen igual perímetro c) el rectángulo y el cuadrado tienen igual perímetro d) No hay dos figuras que tengan igual perímetro



3) En un comercio los cerámicos se venden a $ 80 el metro cuadrado.
a) ¿Cuánto costarán los cerámicos necesarios para cubrir un piso cuadrado de 4 metros de lado, si se los compra en ese comercio? b) Si se paga con tarjeta se aplica un recargo del 12% ¿Cuánto se debe abonar?

4) El área de un triángulo equilátero es 173,20 cm2 y su altura 17,32 cm. Halla la longitud de su lado.

5) Queremos enmarcar un cuadro cuyas dimensiones totales son 103 cm de base por 63 cm de alto. ¿Qué longitud deberá tener la moldura que debemos usar?

6) Averigua el área de un cuadrado cuyo perímetro mide 29,2 cm

7) Calcula el perímetro de un cuadrado cuya superficie mide 10,24 centímetros cuadrados.

8)¿Cuánto costará vallar , con 3 filas de alambre, una huerta con forma de triángulo, cuyos lados miden 14 m, 7 m y 9 m, a razón de $15 euros el metro lineal de alambrada?.

9) En un hoja cuadriculada dibuje un rectángulo de 16 unidades de perímetro (considerando como unidad el lado de los cuadrados de la hoja)
a) dibuje, en la misma cuadrícula, otros tres rectángulos con el mismo perímetro.
b) Para cada uno, que indique la base, la altura y el área.
c) Represente en un sistema de coordenadas la base en función del área.
Observando la gráfica conteste ¿Existe proporcionalidad entre los valores de la base y el área? Justifique